Автоматика и телемеханика, № 1, 2025

Линейные системы

© 2025 г. **В.Е. ХАРТОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук (hartovskij@grsu.by),
О.И. УРБАН (urban_ola@mail.ru)
(Гродненский государственный университет имени Я. Купалы)**

ФИНИТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ПО НЕПОЛНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В КЛАССЕ РЕГУЛЯТОРОВ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ[1]

Для линейной автономной дифференциально-разностной системы нейтрального типа с сосредоточенными запаздываниями получен критерий существования и предложен конструктивный способ построения регулятора с обратной связью по наблюдаемому выходу, одновременно решающего задачу финитной стабилизации (полного успокоения) и обеспечивающего замкнутой системе конечный (но не произвольный) спектр. Отличительной чертой регулятора является отсутствие в структуре распределенного запаздывания, что важно для его практической реализации. Полученные в работе результаты проиллюстрированы числовым примером.

Ключевые слова: дифференциально-разностная система, нейтральный тип, запаздывание, финитная стабилизация, регулятор.

DOI: 10.31857/S0005231025010011, **EDN:** JQZUXO

1. Введение

При моделировании многих процессов в экологии, медицине, электродинамике, механике деформированного твердого тела, технике, экономике и других областях [1–3] используются системы дифференциальных уравнений с запаздыванием. Учет запаздывания в модели, с одной стороны, способствует повышению надежности при описании реальных явлений и прогнозированию поведения соответствующих систем. С другой стороны, включение характеристик процесса в предшествующие моменты времени в закон эволюции системы увеличивает ее сложность. В связи с этим исследованию общей теории систем с запаздыванием, а также использованию таких систем в прикладных областях посвящено достаточно много работ (см. например, Введение в [3]). В настоящей статье исследуется вопрос финитной стабилизации линейных систем нейтрального типа с сосредоточенными запаздываниями в состоянии и управлении.

Задачи стабилизации для систем с запаздыванием являются достаточно сложными [4–11] и на сегодняшний день до конца не изучены. Один из воз-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2025».

можных подходов основан на вычислении неустойчивых собственных значений спектра с последующей заменой их подходящими числами. Однако вопрос нахождение таких значений является нетривиальной задачей. Поэтому более универсальным является метод, основанный на решении задачи назначения замкнутой системе конечного спектра [12–15], как правило состоящего из чисел с отрицательными действительными частями.

Множество собственных значений линейной системы с последействием в общем случае бесконечно, поэтому вопрос управления всеми собственными значениями такой системы естественно рассматривать как управление коэффициентами характеристического квазиполинома – задача модального управления [16–19]. Другое направление исследований, связанное с проблемой стабилизации, заключается [14, 20–22] в решении задачи построения регулятора с обратной связью, обеспечивающего равенство нулю через ограниченное время всех компонент исходной разомкнутой системы, т.е. обеспечивающего финитную стабилизацию [23, 24] (другими словами, решение задачи полной 0-управляемости регулятором с обратной связью). Одна из оригинальных идей решения задачи финитной стабилизации заключается [14, 20] в замыкании системы обратной связью так, чтобы замкнутая система стала системой с конечным спектром, точечно вырожденной в направлениях, соответствующих компонентам вектора-решения исходной системы. Дальнейшее развитие этих идей на системы нейтрального типа получено в [15, 17, 21, 22], а системное изложение этих результатов в монографии [25].

В настоящей работе для линейных автономных систем нейтрального типа с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями построен регулятор финитной стабилизации по выходу, под которым понимается регулятор с обратной связью в виде измерений наблюдаемого выходного сигнала, обеспечивающий одновременно финитную стабилизацию и конечный спектр. Подобная задача с условием выбора любого конечного спектра в случае системы запаздывающего типа со скалярными входом и выходом изучена в [24], а для многовходных систем нейтрального типа в [26]. К недостаткам статьи [26] следует отнести наличие в регуляторе слагаемых с распределенными запаздываниями, хотя исходный объект управления содержит только сосредоточенное запаздывание. Интегралы, содержащие распределенное запаздывание, при практической реализации заменяются конечными суммами, что даже при использовании квадратурных формул высокой точности может привести к нежелательным последствиям (например, потере устойчивости) [27, 28]. Принципиальное отличие настоящей статьи от [26] заключается в новой конструкции регулятора, который содержит сугубо сосредоточенные соизмеримые запаздывания. Идея состоит в том, что строится разрывная обратная связь, определяемая двумя контурами регулятора: внутренним и внешним. Внутренний контур обеспечивает «сглаживание» решения с течением времени, что достигается за счет построения обратной связи, которая преобразует исходную систему в систему запаздывающего типа. После того как решение достигнет необходимой гладкости, «включается» второй контур, цель которого – обеспечить точечную врожденность замкнутой системы в направлениях, соответствующих всем компонентам вектора решения исходной (разомкнутой) системы.

2. Постановка задачи

Пусть исследуемый объект управления описывается линейной автономной дифференциально-разностной системой нейтрального типа с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} D_i \dot{x}(t-ih) = \sum_{i=0}^{m} \Big(A_i x(t-ih) + B_i u(t-ih) \Big), \quad t > 0,$$
$$y(t) = \sum_{i=0}^{m} C_i x(t-ih), \quad t \geqslant 0,$$

где x – вектор состояния этой системы, u – управление, y – наблюдаемый выходной сигнал (выход), $h = \mathrm{const} > 0$; $D_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $C_i \in \mathbb{R}^{l\times n}$.

Обозначим: $I_i \in \mathbb{R}^{i\times i}$ – единичная матрица, λ_h – оператор сдвига, определяемый для заданного $h > 0$ правилом $(\lambda_h)^k f(t) = f(t-kh)$, $k \in \mathbb{N}$ (для произвольной функции f). Введем полиномиальные матрицы

$$D(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} D_i \lambda^i, \quad A(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} A_i \lambda^i, \quad C(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} C_i \lambda^i, \quad B(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} B_i \lambda^i$$

и перепишем исходный объект управления в операторном виде

$$\big(I_n - D(\lambda_h)\big)\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + B(\lambda_h)u(t), \quad t > 0, \tag{1}$$
$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t \geqslant 0. \tag{2}$$

Решение уравнения (1) однозначно задается начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), \quad u(t) \equiv 0, \quad t \in [-mh, 0]. \tag{3}$$

Считаем, что $\varphi \in \widetilde{\mathcal{C}}^1\big([-mh,0],\mathbb{R}^n\big)$ – неизвестная функция, где $\widetilde{\mathcal{C}}^k(\cdot)$ – класс функций, $k-1$ раз непрерывно дифференцируемых и имеющих кусочно-непрерывную производную порядка k. Управление u – кусочно-непрерывная функция.

Пусть $\mathbb{R}^{n\times m}[p,\lambda]$ $\big(\mathbb{R}^{n\times m}[\lambda]\big)$ – множество матриц размера $n \times m$, элементы которых суть полиномы переменных p, λ (λ) (если $m = n = 1$, то верхний индекс не пишем), $p_{\scriptscriptstyle D} = d/dt$ – оператор дифференцирования.

Определим регулятор с обратной связью по наблюдаемому выходу

$$\begin{aligned} u(t) &= U_{11}(p_{\scriptscriptstyle D},\lambda_h)y(t) + U_{12}(p_{\scriptscriptstyle D},\lambda_h)\tilde{x}(t), \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= U_{21}(p_{\scriptscriptstyle D},\lambda_h)y(t) + U_{22}(p_{\scriptscriptstyle D},\lambda_h)\tilde{x}(t), \quad t > t_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ – вспомогательная переменная, $t_0 > 0$ – некоторое число, выбор которого указывается ниже $(u(t) \equiv 0,\ t \leqslant t_0)$, $U_{11}(p,\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times l}[p,\lambda]$, $U_{12}(p,\lambda) \in \in \mathbb{R}^{r\times\tilde{n}}[p,\lambda]$, $U_{21}(p,\lambda) \in \mathbb{R}^{\tilde{n}\times l}[p,\lambda]$, $U_{22}(p,\lambda) \in \mathbb{R}^{\tilde{n}\times\tilde{n}}[p,\lambda]$. Для реализации регулятора (4) задаем начальное условие

$$(5) \quad \tilde{x}(t) = \tilde{\varphi}(t), \quad t \in [t_0 - \tilde{h}, t_0] \quad \Big(\tilde{h} = \tilde{\alpha} h, \quad \tilde{\alpha} = \max\{\deg_\lambda U_{k2}(p,\lambda),\ k = 1,2\}\Big),$$

где $\tilde{\varphi} \in \widetilde{\mathcal{C}}^{\tilde{p}}([t_0 - \tilde{h}, t_0], \mathbb{R}^{\tilde{n}})$ – любая функция, $\tilde{p} = \max\{\deg_p U_{k2}(p,\lambda), k = 1,2\}$, запись $\deg_\lambda f(\lambda)$ обозначает степень полинома (в том числе и матричного).

Цель настоящей работы – построить регулятор в виде (4), который обеспечит выполнение следующих условий: а) каковы бы ни были начальные функции φ в (3) и $\tilde{\varphi}$ в (5), существует число $t_1 > 0$ такое, что векторная компонента x вектора-решения $\mathrm{col}[x, \tilde{x}]$ замкнутой системы (1), (4) равна нулю начиная с момента времени, равного t_1,

$$(6) \qquad x(t) \equiv 0, \quad t \geqslant t_1;$$

б) замкнутая система (1), (4) является линейной автономной системой нейтрального типа с конечным спектром.

Замечание 1. а) Под линейной автономной однородной системой нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями понимаем линейную автономную систему $\Upsilon(p_{_D}, \lambda_h)x(t) = 0$, $\Upsilon(p,\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}[p,\lambda]$, имеющую характеристический квазиполином вида $\big|\Upsilon(p,\lambda)\big| = \sum_{i=0}^{\nu} p^i \tilde{d}_i(\lambda)$, где $\nu = n \deg_p \Upsilon(p,\lambda)$, $\tilde{d}_i(\lambda)$ – полиномы, причем $\tilde{d}_\nu(0) = 1$, запись вида $|\cdot|$ обозначает определитель матрицы. Введя вспомогательные переменные, такую систему можно переписать в виде (1). Линейные автономные дифференциально-разностные системы запаздывающего типа $(\tilde{d}_\nu(\lambda) \equiv 1)$ и обыкновенные системы рассматриваем как частный случай систем нейтрального типа. б) В силу того, что $U_{ij}(p,\lambda)$ – полиномиальные матрицы, система (1), (4) имеет только сосредоточенные соизмеримые запаздывания.

Определение 1. Регулятор вида (4), *обеспечивающий реализацию условий а), б), будем называть регулятором финитной стабилизации по выходу.*

Обозначим: $W(p,\lambda) = p\big(I_n - D(\lambda)\big) - A(\lambda)$.

Лемма 1. Пусть для системы (1), (2) *существует регулятор финитной стабилизации по выходу* (4). *Тогда выполняются условия*

$$(7) \qquad \mathrm{rank}\,\big[W(p, e^{-ph}), B(e^{-ph})\big] = n \quad \forall p \in \mathbb{C};$$

$$(8) \qquad \mathrm{rank}\,\big[I_n - D(\lambda), B(\lambda)\big] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C};$$

$$(9) \qquad \mathrm{rank}\begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C};$$

$$(10) \qquad \mathrm{rank}\begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ C(\lambda) \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Доказательство см. в Приложении.

3. Основной результат

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. Для того чтобы для системы (1), (2) *существовал регулятор финитной стабилизации по выходу* (4), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (7)–(10).

Доказательство. **Необходимость** обоснована леммой 1. **Достаточность.** Доказательство достаточности условий теоремы 1 разобьем на две части. В первой части строится регулятор, реализация которого возможна при условии, что выход $y(t)$ является $\rho_0 - 1$ раз непрерывно дифференцируемой функцией, имеющей кусочно-непрерывную производную порядка ρ_0, где число ρ_0 определяется в процессе построения регулятора и указывается в замечании 2. Для того чтобы обеспечить указанное условие на функцию $y(t)$, считаем, что $\varphi \in \widetilde{\mathcal{C}}^{\rho_0}$. Во второй части доказательства рассматривается общий случай $\varphi \in \widetilde{\mathcal{C}}^1$ и $\rho_0 > 1$, т.е. гладкость начальной функции не обеспечивает требование к гладкости выхода $y(t)$, которое описанно выше.

3.1. Случай $\varphi \in \widetilde{\mathcal{C}}^{\rho_0}$.

Для доказательства достаточности условий теоремы построим регулятор (4). Процесс построения будет состоять из следующих шагов: 1) построение регулятора финитной стабилизации по состоянию; 2) построение финитного наблюдателя; 3) синтез регулятора финитной стабилизации по выходу на основе параметров построенных регулятора и наблюдателя.

1. Построение регулятора финитной стабилизации по состоянию. В силу соотношений (7), (8) для системы (1) существует [22; 25, с. 358] регулятор (назовем его регулятором финитной стабилизации по состоянию)

$$\begin{aligned} u(t) &= L_{00}(p_D, \lambda_h)x(t) + L_{01}(p_D, \lambda_h)\bar{x}(t), \\ \dot{\bar{x}}(t) &= L_{10}(p_D, \lambda_h)x(t) + L_{11}(p_D, \lambda_h)\bar{x}(t), \quad t > 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\bar{x} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ – вспомогательная переменная, $L_{00}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{r \times n}[p, \lambda]$, $L_{01}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{r \times \bar{n}}[p, \lambda]$, $L_{10}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times n}[p, \lambda]$, $L_{11}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}[p, \lambda]$, $\deg_p L_{ij}(p, \lambda) = 1$, для которого выполняются следующие условия: 1) найдется число $\bar{t}_1 > 0$ такое, что независимо от начального условия системы (1), (11) выполняется тождество

$$x(t) \equiv 0, \quad t \geqslant \bar{t}_1; \tag{12}$$

2) система (1), (11) является линейной автономной системой нейтрального типа с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями и конечным (но не наперед заданным) спектром. В силу того, что спектр замкнутой системы конечен, определитель характеристической матрицы этой системы будет полиномом, т.е. справедливо равенство

$$\left|W_0(p, \lambda)\right| = d_0(p). \tag{13}$$

Здесь $d_0(p)$ – некоторый полином, $W_0(p, e^{-ph})$ – характеристическая матрица системы (1), (11), имеющая вид

$$W_0(p,\lambda) = \begin{bmatrix} W(p,\lambda) - B(\lambda)L_{00}(p,\lambda) & -B(\lambda)L_{01}(p,\lambda) \\ -L_{10}(p,\lambda) & pI_{\bar n} - L_{11}(p,\lambda) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Укажем идею построения регулятора (11) [22; 25, с. 358]. Условия (7), (8) являются необходимыми и достаточными для существования таких матриц $L_{ij}(p,\lambda)$ в (11), что система, соответствующая матрице (14), является точечно вырожденной в направлениях $\bar e_i$, $i = \overline{1, n+\bar n - 1}$, где $\bar e_i$ – столбец матрицы $I_{n+\bar n}$ с номером i. Это означает [29], что существует такой момент времени $\bar t_1$, что $\bar e_i' \mathrm{col}[x(t), \bar x(t)] \equiv 0$, $t \geqslant \bar t_1$, $i = \overline{1, n+\bar n-1}$ (символ «$'$» (штрих) обозначает операцию транспонирования). Последнее тождество обеспечивает (12). Процесс построения матриц $L_{ij}(p,\lambda)$ из (11) описан в [22; 25, с. 358].

2. Построение финитного наблюдателя. Под финитным наблюдателем понимаем [30, 31] зависящую от выхода (3) линейную автономную дифференциальную систему запаздывающего типа с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями, конечным спектром и выходом v, обладающую следующим свойством: существует момент времени $t_* > 0$, начиная с которого независимо от начальных условий наблюдателя и уравнения (1) выход наблюдателя v равен решению x уравнения (1), порождающего выход y: $x(t) = v(t)$, $t \geqslant t_*$.

В [30, 31] показано, что условия (9), (10) необходимы и достаточны для существования финитного наблюдателя. При этом наблюдатель можно построить как в виде системы с распределенными запаздываниями и любым конечным заданным спектром [30], так и в виде системы без распределенного запаздывания с конечным, но не заданным спектром [31]. Для целей настоящей статьи проведем модификацию одного из наблюдателей из работы [31].

В силу условия (10) найдутся [17, 22] матрицы $L_1(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times l}[\lambda]$ и $L_2(\lambda) \in \mathbb{R}^{l\times l}[\lambda]$ такие, что справедливо тождество

$$\left|I_{n+l} - D_L(\lambda)\right| \equiv 1, \quad D_L(\lambda) = \begin{bmatrix} D(\lambda) & \lambda L_1(\lambda) \\ C(\lambda) & \lambda L_2(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Пусть $\Pi(\lambda) = [\Pi_{ij}(\lambda)]_{i,j=1}^{2}$ – матрица, присоединенная к матрице $(I_{n+l} - D_L(\lambda))$, где $\Pi_{11}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}[\lambda]$, $\Pi_{12}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times l}[\lambda]$, $\Pi_{21}(\lambda) \in \mathbb{R}^{l\times n}[\lambda]$, $\Pi_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{l\times l}[\lambda]$. Из (15) следует, что $\Pi(\lambda) = \big(I_{n+l} - D_L(\lambda)\big)^{-1}$. Введем новую функцию $\chi(t)$ по формуле

$$\chi(t) = \big(I_n - D(\lambda_h)\big)x(t), \quad t \geqslant 0. \tag{16}$$

Пусть $\tilde\chi(t)$, $\big(\tilde\chi \in \mathbb{R}^l,\ t \in \mathbb{R}\big)$ – произвольная функция. Действуя на равенство

$$\begin{bmatrix} I_n - D(\lambda_h) & -\lambda_h L_1(\lambda_h) \\ -C(\lambda_h) & I_l - \lambda_h L_2(\lambda_h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde\chi(t) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \chi(t) \\ -y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda_h L_1(\lambda_h)\tilde\chi(t) \\ \big(I_l - \lambda_h L_2(\lambda_h)\big)\tilde\chi(t) \end{bmatrix}, \quad t \geqslant 0,$$

слева оператором $\Pi(\lambda_h)$, доказываем соотношение

$$x(t) = \Pi_{11}(\lambda_h)\chi(t) - \Pi_{12}(\lambda_h)y(t), \quad t \geqslant \gamma_2 h, \tag{17}$$

где $\gamma_2 = \max\{\nu_{1j},\, j = 1, 2\}$, $\nu_{ij} = \deg_\lambda \Pi_{ij}(\lambda)$. Введем обозначения:

$$\widetilde{A}(\lambda) = A(\lambda)\Pi_{11}(\lambda), \quad \widetilde{C}(\lambda) = \begin{bmatrix} C(\lambda)\Pi_{11}(\lambda) \\ \big(I_n - D(\lambda)\big)\Pi_{11}(\lambda) - I_n \end{bmatrix},$$

$$\tilde{y}(t) = C_y(\lambda_h)y(t), \ \ t \geqslant \gamma_3 h, \ \ C_y(\lambda) = \begin{bmatrix} I_l + C(\lambda)\Pi_{12}(\lambda) \\ \big(I_n - D(\lambda)\big)\Pi_{12}(\lambda) \end{bmatrix}, \ \ \gamma_3 = m + \gamma_2.$$

На основании (16), (17) систему (1), (2) перепишем в виде неоднородной линейной автономной дифференциально-разностной системы запаздывающего типа с соизмеримыми запаздываниями и известным выходом $\tilde{y}$:

$$\dot{\chi}(t) = \widetilde{A}(\lambda_h)\chi(t) + B(\lambda_h)u(t) - A(\lambda_h)\Pi_{12}(\lambda_h)y(t), \quad t > \gamma_3 h, \tag{18}$$

$$\tilde{y}(t) = \widetilde{C}(\lambda_h)\chi(t), \quad t \geqslant \gamma_3 h. \tag{19}$$

В силу соотношения (9) для системы (18), (19) выполнятся условие [30, 31]

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} pI_n - \widetilde{A}(e^{-ph}) \\ \widetilde{C}(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C}. \tag{20}$$

Из (20) следует [12], что для любого $i_0 \in \{1, \ldots, n + l\}$ найдется $V_{i_0}(\lambda) \in$ $\in \mathbb{R}^{n\times(n+l)}[\lambda]$ такая, что

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} pI_n - \widetilde{A}(e^{-ph}) - V_{i_0}(e^{-ph})\widetilde{C}(e^{-ph}) \\ \tilde{c}_{i_0}(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C}, \tag{21}$$

где $\tilde{c}_{i_0}(\lambda)$ – строка матрицы $\widetilde{C}(\lambda)$ с номером i_0. Положим

$$\widetilde{A}_V(\lambda) = \widetilde{A}(\lambda) + V_{i_0}(\lambda)\widetilde{C}(\lambda), \quad K_0(\lambda) = -A(\lambda)\Pi_{12}(\lambda_h) - V_{i_0}(\lambda)C_y(\lambda). \tag{22}$$

Используя уравнения (18), (19) и формулы (22), систему (1), (2) заменим системой

$$\begin{aligned} \dot{\chi}(t) &= \widetilde{A}_V(\lambda_h)\chi(t) + B(\lambda_h)u(t) + K_0(\lambda_h)y(t), \quad t > \tilde{t}_1, \\ \tilde{y}_{i_0}(t) &= \tilde{c}_{i_0}(\lambda_h)\chi(t), \quad t \geqslant \tilde{t}_1, \end{aligned} \tag{23}$$

где $\tilde{y}_{i_0}(t)$ – компонента вектора $\tilde{y}$ с номером i_0, $\tilde{t}_1 = (\nu_0 + \gamma_3)h$, $\nu_0 = \deg_\lambda V_{i_0}(\lambda)$.

В силу условия (21) для системы (23) существует [31] финитный наблюдатель в виде системы с конечным спектром запаздывающего типа, имеющей сугубо сосредоточенные соизмеримые запаздывания

$$\dot{z}(t) = Q(p_D, \lambda_h)z(t) + K(\lambda_h)y(t) + \overline{B}(\lambda_h)u(t), \quad t > \tilde{t}_1, \tag{24}$$

и выход v_z, определяющий оценку решения χ системы (23),

$$v_z(t) = \big[I_n, 0_{n\times 3}\big] z(t), \quad t \geqslant \tilde{t}_1. \tag{25}$$

Здесь $z = \mathrm{col}\,[z_1, z_2]$, $z_1 \in \mathbb{R}^n$, $z_2 \in \mathbb{R}^3$, $z_1 = \mathrm{col}[z_{11}, \ldots, z_{1n}]$, $z_2 = \mathrm{col}[z_{21}, z_{22}, z_{23}]$, $Q(p,\lambda) \in \mathbb{R}^{(n+3)\times(n+3)}[p, z]$, $0_{n\times m}$ – нулевая $n \times m$-матрица,

$$\overline{B}(\lambda) = \begin{bmatrix} B(\lambda) \\ 0_{3\times r} \end{bmatrix}, \tag{26}$$

матрица $K(\lambda)$ определяется из равенства

$$K(\lambda_h) y(t) = \begin{bmatrix} K_0(\lambda_h) \\ 0_{3\times l} \end{bmatrix} y(t) - e_{n+1} \tilde{y}_{i_0}(t) = \left(\begin{bmatrix} K_0(\lambda_h) \\ 0_{3\times l} \end{bmatrix} - e_{n+1}\, \tilde{e}'_{i_0} C_y(\lambda_h) \right) y(t), \tag{27}$$

где e_i, $\tilde{e}_i$ – столбцы матрицы I_{n+3}, I_{n+l} с номером i соответственно. Матрица $Q(p,\lambda)$ определяется [31] по схеме построения матрицы, задающей финитный наблюдатель для однородной системы запаздывающего типа со скалярным выходом. Элементы матрицы $Q(p,\lambda)$ таковы, что однородная система (24) после введения вспомогательных переменных может быть записана в стандартном виде линейной автономной системы запаздывающего типа (т.е. в виде $\dot{X}(t) = \Sigma(\lambda_h) X(t)$, где $\Sigma(\lambda)$ – полиномиальная матрица), и

$$\big| p I_{n+3} - Q(p,\lambda) \big| = d_1(p), \tag{28}$$

где $d_1(\lambda)$ – полином. Матрица $Q(p,\lambda)$ имеет вид

$$Q(p,\lambda) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \tilde{a}^V_{11}(\lambda) & \ldots & \tilde{a}^V_{1n}(\lambda) & g_{11}(\lambda) & \tilde{g}_{12} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{a}^V_{n1}(\lambda) & \ldots & \tilde{a}^V_{nn}(\lambda) & g_{n1}(\lambda) & \tilde{g}_{n2} & 0 \\ \hline \tilde{c}^1_{i_0}(\lambda) & \ldots & \tilde{c}^n_{i_0}(\lambda) & g_{n+1\,1}(p,\lambda) & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda g_{n+2\,1}(p,\lambda) & g_{n+2\,2}(p,\lambda) & g_{n+2\,3}(\lambda) \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda g_{n+3\,1}(\lambda) & g_{n+3\,2}(\lambda) & g_{n+3\,3}(\lambda) \end{array} \right], \tag{29}$$

где $\tilde{a}^V_{ij}(\lambda)$ – элементы матрицы $\widetilde{A}_V(\lambda)$, $\widetilde{A}_V(\lambda) = \big[\tilde{a}^V_{ij}(\lambda)\big]_{n\times n}$, $\tilde{c}^j_{i_0}(\lambda)$ – элементы вектора $\tilde{c}_{i_0}(\lambda)$, $\tilde{c}_{i_0}(\lambda) = \big[\tilde{c}^1_{i_0}(\lambda), \ldots, \tilde{c}^n_{i_0}(\lambda)\big]$, $g_{ij}(p,\lambda)$, $g_{ij}(\lambda)$ — полиномы переменных p, λ и λ соответственно, $\tilde{g}_{i2} \in \mathbb{R}$.

Замечание 2. Пусть $\rho_0 = \max\{\deg_p g_{n+2\,1}(p,\lambda) - \deg_p(g_{n+1\,1}(p,\lambda) - p), 1\}$. Компонента z_{21} зависит от выхода y. Поэтому для существования в системе (24) слагаемого $\lambda_h g_{n+2\,1}(p_D, \lambda_h) z_{21}$ необходимо, чтобы $z_{21} \in \widetilde{\mathcal{C}}^{\rho_0}\big([\tilde{t}_1, +\infty), \mathbb{R}\big)$. Значит, должно быть $\tilde{y}_{i_0} \in \widetilde{\mathcal{C}}^{\rho_0}\big([\tilde{t}_1, +\infty), \mathbb{R}\big)$, это обеспечивается тем, что $\varphi \in \widetilde{\mathcal{C}}^{\rho_0}\big([-mh, 0], \mathbb{R}^n\big)$.

Компоненты начальной функции $z(t)$, $t \in [\tilde{t}_1 - h_0, \tilde{t}_1]$ (h_0 – длина отрезка последействия системы (24)), берутся достаточно гладкими с кусочно-непрерывной старшей производной (порядок старшей производной для каждой компоненты определяется максимальной степенью переменной p соответствующих полиномов в матрице (29)). В частности, можно положить $z(t) \equiv 0$, $t \in [t_0 - h_0, t_0]$.

Поясним идею выбора элементов матрицы $Q(p, \lambda)$. Обозначим: $\zeta = v_z - \chi = z_1 - \chi$ – ошибка оценки, $\tilde{\zeta} = \mathrm{col}\,[\zeta, z_2]$. Тогда из (29), (25) видно, что вектор-функция $\tilde{\zeta}(t)$ определяется линейной автономной системой запаздывающего типа

$$\dot{\tilde{\zeta}}(t) = Q(p_{\scriptscriptstyle D}, \lambda_h)\tilde{\zeta}(t), \quad t > \tilde{t}_1. \tag{30}$$

Элементы матрицы $Q(p, \lambda)$ выбираются так, чтобы система (30) была точечно вырожденной в направлениях, отвечающих первым $n + 2$ столбцам матрицы I_{n+3}, т.е. в направлениях e_i, $i = \overline{1, n + 2}$. Значит, найдется момент времени $\tilde{t}_2$ такой, что какова бы ни была начальная функция, определяющая решение системы (30), будут выполняться тождества $e_i'\tilde{\zeta}(t) \equiv 0$, $t \geqslant \tilde{t}_2$, $i = \overline{1, n + 2}$. Отсюда получаем, что независимо от начальных функций систем (1) и (24) выполняется равенство

$$\chi(t) = v_z(t), \quad t \geqslant \tilde{t}_2. \tag{31}$$

Оценку решения системы (1), (2) получим, используя формулу (17). Положим

$$v(t) = \Pi_{11}(\lambda_h)\big[I_n, 0_{n\times 3}\big]z(t) - \Pi_{12}(\lambda_h)y(t), \quad t \geqslant \tilde{t}_1. \tag{32}$$

Из равенства (31) и формулы (17) следует, что

$$x(t) = v(t), \quad t \geqslant \tilde{t}_3, \tag{33}$$

где $\tilde{t}_3 = \tilde{t}_2 + \nu_{11}h$. Таким образом построен финитный наблюдатель (24), (32).

3. Синтез регулятора финитной стабилизации по выходу. Построим соотношения, которые будут определять регулятор (4). Для этого в уравнениях (24) заменим управления $u(t)$ согласно первой формуле в (11). После этого в полученном уравнении и в соотношениях (11) переменную x выразим через z, y согласно (33), (32). Далее переменные $\bar{x}$, z обозначим как x_1, x_2 соответственно и запишем полученный регулятор

$$u(t) = R_{01}(p_{\scriptscriptstyle D}, \lambda_h)x_1(t) + R_{02}(p_{\scriptscriptstyle D}, \lambda_h)x_2(t) + R_{00}(p_{\scriptscriptstyle D}, \lambda_h)y(t), \tag{34}$$

$$\dot{x}_1(t) = R_{11}(p_{\scriptscriptstyle D}, \lambda_h)x_1(t) + R_{12}(p_{\scriptscriptstyle D}, \lambda_h)x_2(t) + R_{10}(p_{\scriptscriptstyle D}, \lambda_h)y(t), \tag{35}$$

$$\begin{gathered} \dot{x}_2(t) = R_{22}(p_{\scriptscriptstyle D}, \lambda_h)x_2(t) + \overline{B}(\lambda_h)\Big(R_{01}(p_{\scriptscriptstyle D}, \lambda_h)x_1(t) + \\ + R_{02}(p_{\scriptscriptstyle D}, \lambda_h)x_2(t) + R_{00}(p_{\scriptscriptstyle D}, \lambda_h)y(t)\Big) + K(\lambda_h)y(t), \quad t > t_0, \end{gathered} \tag{36}$$

где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$ $(n_1 = \bar{n},\ n_2 = n + 3)$, – вспомогательные переменные, $t_0 = \alpha_0 h$, $\alpha_0 = \max\big\{\deg_\lambda R_{00}(p, \lambda) + m,\ \deg_\lambda R_{10}(p, \lambda), \deg_\lambda K(\lambda)\big\}$,

$$\begin{gathered} R_{i0}(p, \lambda) = -L_{i0}(p, \lambda)\Pi_{12}(\lambda), \quad R_{i1}(p, \lambda) = L_{i1}(p, \lambda), \\ R_{i2}(p, \lambda) = L_{i0}(p, \lambda)\Pi_{11}(\lambda)\big[I_n, 0_{n\times 3}\big], \quad i = 0, 1, \quad R_{22}(p, \lambda) = Q(p, \lambda). \end{gathered} \tag{37}$$

Для того чтобы записать регулятор (34)–(36) в виде (4), положим $\tilde{x} = \operatorname{col}[x_1, x_2]$, $U_{11}(p,\lambda) = R_{00}(p,\lambda)$, $U_{12}(p,\lambda) = \operatorname{col}[R_{01}(p,\lambda), R_{02}(p,\lambda)]$,

$$U_{21}(p,\lambda) = \begin{bmatrix} R_{10}(p,\lambda) \\ \overline{B}(\lambda)R_{00}(p,\lambda) + K(\lambda) \end{bmatrix},$$

$$U_{22}(p,\lambda) = \begin{bmatrix} R_{11}(p,\lambda) & R_{12}(p,\lambda) \\ \overline{B}(\lambda)R_{01}(p,\lambda) & R_{22}(p,\lambda) + \overline{B}(\lambda)R_{02}(p,\lambda) \end{bmatrix}.$$

Пусть $\hat{e}_i$ – столбцы единичной матрицы $I_{n+n_1+n_2}$.

Утверждение 1. Система (1), (2), (34)–(36) *является точечно вырожденной в направлениях* $\hat{e}_i$, $i = \overline{1, n+n_1-1}$, $i = \overline{n+n_1+1, n+n_1+n_2-1}$, *а множество ее спектральных значений и их кратность определяются корнями полинома* $d_0(\lambda)d_1(\lambda)$.

Доказательство см. в Приложении.

Из утверждения 1 следует, что построенный регулятор (34)–(36) является регулятором финитной стабилизации по выходу. Теорема 1 для случая $\varphi \in \widetilde{\mathcal{C}}^{\rho_0}$ доказана.

3.2. Случай $\varphi \in \widetilde{\mathcal{C}}^1$.

Если число ρ_0 из замечания 2 равно единице, $\rho_0 = 1$, то регулятор (34)–(36) есть искомый регулятор финитной стабилизации и рассуждения раздела 3.2 не требуются. Далее предполагаем, что $\rho_0 > 1$.

Регулятор финитной стабилизации по выходу будем строить в виде регулятора переменной структуры (разрывной обратной связи) [33], которая будет состоять из двух последовательно соединенных контуров: внутреннего $\widehat{u}$ и внешнего v:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant t_5, \\ \widehat{u}(t), & t \in (t_5, t_6], \\ \widehat{u}(t) + v(t), & t > t_6. \end{cases} \tag{38}$$

Внутренний контур $\widehat{u}$ обеспечит системе (1), замкнутой этим контуром, «сглаживание» решения с течением времени. После того, как решение системы будет $\rho_0 - 1$ раз непрерывно-дифференцируемым и иметь кусочно-непрерывную производную порядка ρ_0, «включается» внешний контур v вида (34)–(36), который обеспечит точечную вырожденность замкнутой системы.

Замечание 3. В общем случае контуры $\widehat{u}$ и v в качестве аргументов могут содержать вспомогательные переменные. Поэтому полное описание регулятора финитной стабилизации по выходу будет представлять собой соотношение (38), а также дополнительные дифференциальные уравнения с начальными условиями, описывающие поведение вспомогательных переменных аналогично соотношениям (4), (5).

Укажем условие на параметры однородной ($u \equiv 0$) системы (1), при выполнении которого гладкость ее решения с течением времени повышается. Обозначим через $\Pi_D(\lambda)$ матрицу, присоединенную к матрице $\big(I_n - D(\lambda)\big)$, $m_0 = \deg_\lambda A(\lambda)\Pi_D(\lambda)$.

Лемма 2. Пусть для однородной ($u \equiv 0$) *системы* (1) *выполняется условие*

$$\big|I_n - D(\lambda)\big| \equiv 1, \tag{39}$$

а в начальном условии (3) $\varphi \in \widetilde{\mathcal{C}}^1$. *Тогда для любого* $\rho_1 \in \mathbb{N}$ *и решения* x *системы* (1) *выполняется* $x \in \widetilde{C}^{\rho_1}\big([t_4 + \rho_1 m_0 h, +\infty), \mathbb{R}^n\big)$, *где* $t_4 = h \deg_\lambda \Pi_D(\lambda)$.

Доказательств см. в Приложении.

Замечание 4. Тождество (39) эквивалентно тому, что характеристический квазиполином системы (1) имеет вид $\big|W(p,\lambda)\big| = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} p^i \hat{\hat{d}}_i(\lambda)$, где $\hat{d}_i(\lambda)$ – полиномы.

Замечание 5. Из доказательства леммы 2 (см. Приложение) следует, что при выполнении (39) однородная система нейтрального типа при помощи невырожденной замены переменных приводится к системе запаздывающего типа, решение которой «сглаживается» с течением времени. Приведем иные рассуждения, показывающие, что если для однородной системы нейтрального типа имеет место (39), то с возрастанием времени t гладкость решения повышается. Для наглядности будем предполагать, что $D_1 \neq 0$, $D_i = 0$, $i = \overline{2,m}$, т.е. система (1) имеет вид

$$\dot{x}(t) - D_1\dot{x}(t-h) = A(\lambda_h)x(t), \quad t > 0.$$

Тогда справедлива цепочка равенств

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + D_1\dot{x}(t-h) = \\ = A(\lambda_h)x(t) + D_1\big(A(\lambda_h)x(t-h) + D_1\dot{x}(t-2h)\big) = \\ = \ldots = \sum_{i=0}^{\tilde{m}-1} D_1^i A(\lambda_h)x(t-ih) + D^{\tilde{m}}\dot{x}(t-\tilde{m}h), \quad t > \tilde{m}h, \quad \tilde{m} \in \mathbb{N}.\end{gathered} \tag{40}$$

Условие (39) в рассматриваемом случае ($D_1 \neq 0$, $D_i = 0$, $i = \overline{2,m}$) имеет вид $\big|I_n - \lambda D_1\big| \equiv 1$. Это значит, что матрица D_1 является нильпотентной. Пусть $\tilde{m}_0$ – индекс нильпотентности матрицы D_1, $D_1^{\tilde{m}_0} = 0$. Тогда из (40) имеем

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{\tilde{m}_0-1} D_1^i A(\lambda_h)x(t-ih), \quad t > \tilde{m}_0 h. \tag{41}$$

Система (41) есть система запаздывающего типа с $m(\tilde{m}_0 - 1)$ соизмеримыми запаздываниями. Это говорит о том, что при $t > k\tilde{m}_0 h$, $k = 1, 2, \ldots$, гладкость решения увеличивается на k единиц.

Подобные рассуждения справедливы и при произвольной полиномиальной матрице $\widetilde{D}(\lambda)$ (условие (39) как необходимое и достаточное для нильпотентности некоторой матрицы, стоящей при производных решения, содержащих запаздывания, обсуждается в [25, с. 218] (см. лемму 4.10)).

Лемма 3. Пусть выполняются условия (8), (10). *Тогда существуют матрицы* $\widetilde{U}_{11}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times l}[\lambda]$, $\widetilde{U}_{12}(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times(r+n+l)}[\lambda]$, $\widetilde{U}_{21}(\lambda) \in \mathbb{R}^{(n+r+l)\times n}[\lambda]$, $\widetilde{U}_{22}(\lambda) \in \mathbb{R}^{(r+n+l)\times(r+n+l)}[\lambda]$ *такие, что*

$$\begin{gathered}\left|I_{2n+r+l} - \widetilde{D}(\lambda)\right| \equiv 1,\\ \widetilde{D}(\lambda) = \begin{bmatrix} D(\lambda) + B(\lambda)\widetilde{U}_{11}(\lambda)C(\lambda) & B(\lambda)\widetilde{U}_{12}(\lambda) \\ \widetilde{U}_{21}(\lambda)C(\lambda) & \widetilde{U}_{22}(\lambda)\end{bmatrix},\ \widetilde{D}(0) = 0_{(2n+r+l)\times(2n+r+l)}.\end{gathered} \tag{42}$$

Доказательство см. в Приложении.

Регулятор внутреннего контура определим соотношениями

$$\begin{gathered}\widetilde{u}(t) = p_{D}\widetilde{U}_{11}(\lambda_h)y(t) + p_{D}\widetilde{U}_{12}(\lambda_h)x_3(t) + v_1(t),\\ \dot{x}_3(t) = p_{D}\widetilde{U}_{21}(\lambda_h)y(t) + p_{D}\widetilde{U}_{22}(\lambda_h)x_3(t) + v_2(t), \quad t > t_5,\end{gathered} \tag{43}$$

где $x_3 \in \mathbb{R}^{n+r+l}$ – вспомогательная переменная, $v = \mathrm{col}[v_1, v_2]$, матрицы $\widetilde{U}_{ij}(\lambda)$ обеспечивают (42), $t_5 = h\ \max\left\{m + \deg_\lambda \widetilde{U}_{11}(\lambda),\ \deg_\lambda \widetilde{U}_{21}(\lambda)\right\}$. Запишем систему (1), (43):

$$\begin{gathered}\left(I_{2n+r+l} - \widetilde{D}(\lambda)\right)\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\lambda_h) & 0_{n\times(n+r+l)} \\ 0_{(n+r+l)\times n} & 0_{(n+r+l)\times(n+r+l)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} B(\lambda_h) & 0_{n\times(n+r+l)} \\ 0_{(n+r+l)\times r} & I_{n+r+l}\end{bmatrix} v(t), \quad t > t_5.\end{gathered} \tag{44}$$

За счет условия $\widetilde{D}(0) = 0_{(2n+r+l)\times(2n+r+l)}$ система (44) имеет нейтральный тип, а в силу (42) для нее выполняется условие леммы 2.

Зададим начальное условие $x_3(t) = \varphi_3(t)$, $t \in [t_5 - h_3, t_5]$, где $\varphi_3 \in \mathcal{C}^1\big([t_5 - h_3, t_5], \mathbb{R}^{n+r+l}\big)$ – любая функция, $h_3 = h \max\left\{\deg_\lambda \widetilde{W}_{13}(\lambda), \deg_\lambda \widetilde{W}_{23}(\lambda)\right\}$.

Для системы (44) добавим выходной сигнал

$$y_1(t) = \begin{bmatrix} C(\lambda_h) & 0_{l\times(n+r+l)} \\ 0_{(n+r+l)\times n} & I_{n+r+l}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}, \tag{45}$$

где $y_1(t) = \mathrm{col}[y(t), x_3(t)]$. Несложно убедиться, что для системы (44), (45) выполняются условия теоремы 1.

В системе (44) полагаем $v(t) = 0$, $t \leqslant t_6$. При $t > t_6$ контур v строим по схеме раздела 3.1, но для системы (44), (45). Число t_6 выбираем таким, чтобы выполнялось требование к гладкости решения, описанное в замечании 2.

Замечание 6. В ряде случаев может оказаться, что существует полиномиальная матрица $\widetilde{U}(\lambda)$ такая, что $\left|I_n - D(\lambda) - \lambda B(\lambda)\widetilde{U}(\lambda)C(\lambda)\right| \equiv 1$. Тогда для уменьшения размера матриц регулятора финитной стабилизации по выходу вместо (43) следует взять регулятор внутреннего контура в виде $\widetilde{u}(t) = p_{_D}\widetilde{U}(\lambda_h)y(t) + v(t)$. В этом случае вместо выхода (45) берем выход (3), а переменная x_3 и соответствующие ей блоки в (44) будут отсутствовать (см. пример ниже).

Пример 1. Продемонстрируем заложенный в доказательстве теоремы 1 способ построения регулятора финитной стабилизации вида (4) на примере системы (1), (2) с матрицами ($h = \ln 2$)

$$(46)\quad D(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+\lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 0 \end{bmatrix},\ A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ C(\lambda) = \begin{bmatrix} 1+\lambda, & 0 \end{bmatrix}.$$

В данном случае условия теоремы 1 выполнены. Согласно замечанию 6 находим (ниже $[\lambda_h]$ – матрица размера 1×1)

$$(47)\qquad \widetilde{u}(t) = p_{_D}[\lambda_h]y(t) + v(t), \quad t > t_5 = 2h.$$

Система (44), (45) для случая (46), (47) будет иметь вид

$$(48)\qquad \begin{gathered} \left(I_2 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\lambda_h & 0 \end{bmatrix}\right)\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1-\lambda_h & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \\ + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v(t),\ y(t) = \begin{bmatrix} 1+\lambda_h, & 0 \end{bmatrix} x(t),\ t > t_5. \end{gathered}$$

Эту систему интерпретируем далее как систему (1), (2) и выполняем шаги 1)–3) из раздела 3.1.

1. Регулятор (11) строим согласно [22]:

$$(49)\qquad \begin{aligned} v(t) &= \left[-\frac{2}{3}\lambda_h^3 + \lambda_h^2 + \frac{8}{3}\lambda_h - 2,\ -\frac{2}{3}\lambda_h^2 + \lambda_h - \frac{4}{3}\right] x(t) + \\ &\quad + \left[\lambda_h^3 - \frac{7}{2}\lambda_h^2 + \frac{7}{2}\lambda_h - 1\right] \bar{x}(t), \\ \dot{\bar{x}}(t) &= \left[-\frac{4}{9}\lambda_h^2 + \frac{10}{9}\lambda_h + \frac{8}{3},\ \frac{4}{9}\lambda_h + \frac{10}{9}\right] x(t) + \left[\frac{2}{3}\lambda_h^2 - 3\lambda_h + \frac{7}{3}\right] \bar{x}(t). \end{aligned}$$

Систему (48) замкнем регулятором (49). Характеристическая матрица $W_0(p,\lambda)$ (см. (14)) имеет вид

$$(50)\quad W_0(p,\lambda) = \\ = \begin{bmatrix} p + 1 + \frac{2}{3}\lambda^3 - \lambda^2 - \frac{5}{3}\lambda & \frac{2}{3}\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{3} & -\lambda^3 + \frac{7}{2}\lambda^2 - \frac{7}{2}\lambda + 1 \\ p\lambda + \frac{2}{3}\lambda^3 - \lambda^2 - \frac{8}{3}\lambda + 2 & p + \frac{2}{3}\lambda^2 - \lambda + \frac{4}{3} & -\lambda^3 + \frac{7}{2}\lambda^2 - \frac{7}{2}\lambda + 1 \\ \frac{4}{9}\lambda^2 - \frac{10}{9}\lambda - \frac{8}{3} & \frac{4}{9}\lambda - \frac{10}{9} & p - \frac{2}{3}\lambda^2 + 3\lambda - \frac{7}{3} \end{bmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $d_0(p) = p^3 - p$. Для исследования точечной вырожденности можно применить, например, теорему 1.1 из [29]. Кратко проиллюстрируем этот процесс. Поскольку элементы первых двух строк матрицы, присоединенной к матрице $W_0(p, e^{-ph})$ из (50), обращаются в ноль на корнях полинома $d_0(p)$, то элементы первых двух строк матрицы $\big(W_0(p, e^{-ph})\big)^{-1}$ – целые функции. Отсюда следует [29] точечная вырожденность в направлениях $[1, 0, 0]$ и $[0, 1, 0]$, т.е. имеет место (12). Максимальная степень переменной λ в этих строках не превышает числа 5, поэтому $\bar{t}_1 = 5h$.

2. Строим финитный наблюдатель (24), (32). В данном случае находим

$$D_L(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -\dfrac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1+\lambda & 0 & -\dfrac{\lambda}{2} \end{bmatrix}, \quad \Pi(\lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda}{2}+1 & 0 & -\dfrac{\lambda}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1+\lambda & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{C}(\lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda^2}{2}+\dfrac{3}{2}\lambda+1 & 0 \\ -\dfrac{\lambda^2}{2}-\dfrac{\lambda}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_y(\lambda) = \begin{bmatrix} -\dfrac{\lambda^2}{2}+\dfrac{\lambda}{2}+1 \\ \dfrac{\lambda^2}{2}-\dfrac{\lambda}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$V_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ (i_0 = 2).$$

Система (23) принимает вид

$$\dot{\chi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \chi(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad \tilde{y}_2(t) = \left[-\frac{\lambda_h^2}{2} - \frac{\lambda_h}{2}, 0\right] \chi(t). \tag{51}$$

Используя (51), окончательно получаем соотношения (24), (32):

$$\dot{z}(t) = Q(p_D, \lambda_h) z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{\lambda_h^2}{2}+\dfrac{\lambda_h}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_h}{2}+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z_1(t) + \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_h}{2} \\ 0 \end{bmatrix} y(t).$$

Выпишем элементы матрицы $Q(p, \lambda)$, расположенные в блоках с номерами (1,2), (2,2) (вид остальных элементов очевиден):

$$g_{11}(\lambda) = 0, \quad g_{21}(\lambda) = 0, \quad g_{31}(p, \lambda) = -1,$$

$$
\begin{aligned}
g_{41}(p,\lambda) = {} & \frac{428\,259\,827\,248}{370\,825\,875} + \frac{13\,308\,418}{37\,975}p + \frac{3\,263\,970\,139}{410\,130}p\lambda^2 - \\
& - \frac{64\,061\,677\,864\,590\,419}{683\,506\,252\,800}\lambda^7 - \frac{4\,504\,350\,207\,517}{370\,825\,875}\lambda + \frac{10\,314\,197}{36\,325\,800}\lambda^{14} + \\
& + \frac{109\,094\,554\,247\,916\,287}{683\,506\,252\,800}\lambda^6 - \frac{17\,328\,104\,121\,953\,0591}{854\,382\,816\,000}\lambda^5 - \\
& - \frac{5\,199\,361\,041\,200\,909}{379\,725\,696\,000}\lambda^9 + \frac{47\,137\,018\,631\,639\,513}{1\,139\,177\,088\,000}\lambda^8 + \\
& + \frac{1\,145\,930\,623\,773\,433}{341\,753\,126\,400}\lambda^{10} - \frac{3631}{605\,430}\lambda^{15} - \frac{21\,985\,862\,341}{3\,645\,600}p\lambda^5 + \\
& + \frac{460\,650\,668\,593}{43\,747\,200}p\lambda^4 - \frac{154\,784\,798\,249}{13\,124\,160}p\lambda^3 + \frac{255\,035\,489\,398}{4\,944\,345}\lambda^2 + \\
& + \frac{3\,925\,747\,081}{1\,749\,888}p\lambda^6 - \frac{90\,876\,950\,917}{15\,256\,836\,000}\lambda^{13} - \frac{1\,159\,012\,171}{2\,187\,360}p\lambda^7 - \\
& - \frac{1\,743\,623\,839\,315\,721}{14\,239\,713\,600}\lambda^3 + \frac{30\,878}{315}p^2 + \frac{222\,361}{2520}p^2\lambda^4 - \\
& - \frac{433\,453}{1008}p^2\lambda^3 + \frac{819\,967}{1008}p^2\lambda^2 - \frac{718\,133}{1260}p^2\lambda - \frac{3\,824\,219\,437}{1\,367\,100}p\lambda - \\
& - \frac{3631}{630}p^2\lambda^5 + \frac{160\,864\,251\,357\,763\,979}{854\,382\,816\,000}\lambda^4 - \frac{101\,487\,682\,282\,697}{170\,876\,563\,200}\lambda^{11} - \\
& - \frac{3\,412\,403}{585\,900}p\lambda^9 + \frac{3631}{19\,530}p\lambda^{10} + \frac{2\,474\,356\,747}{32\,810\,400}p\lambda^8 + \\
& + \frac{4\,478\,040\,783\,667}{61\,027\,344\,000}\lambda^{12},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{51}(\lambda) = {} & - \frac{7\,991\,397\,801\,907\,001}{3\,218\,768\,595\,000}\lambda + \frac{430\,769\,061\,660\,938\,381}{51\,500\,297\,520\,000}\lambda^4 - \\
& - \frac{90\,522\,930\,353\,255\,419}{794\,576\,018\,880\,000}\lambda^9 + \frac{7\,882\,042\,993\,003\,211}{397\,288\,009\,440\,000}\lambda^{10} + \\
& + \frac{38\,819\,644\,979\,750\,780\,339}{11\,124\,064\,264\,320\,000}\lambda^6 + \frac{5\,294\,886\,380\,912\,311\,157}{11\,124\,064\,264\,320\,000}\lambda^8 - \\
& - \frac{16\,491\,589\,988\,451\,048\,767}{11\,124\,064\,264\,320\,000}\lambda^7 - \frac{2\,550\,527\,148\,568\,185\,769}{309\,001\,785\,120\,000}\lambda^3 - \\
& - \frac{68\,686\,980\,782\,797}{28\,377\,714\,960\,000}\lambda^{11} + \frac{440\,289\,519\,864\,500\,737}{77\,250\,446\,280\,000}\lambda^2 - \\
& - \frac{7\,699\,195\,015\,471\,454\,567}{1\,236\,007\,140\,480\,000}\lambda^5 + \frac{3631}{18\,768\,330}\lambda^{14} - \frac{384\,159}{41\,707\,400}\lambda^{13} + \\
& + \frac{30\,684\,351\,847}{157\,653\,972\,000}\lambda^{12} + \frac{23\,072\,498\,192\,986}{44\,705\,119\,375},
\end{aligned}
$$

$$
\tilde{g}_{12} = 0, \quad \tilde{g}_{22} = 2,
$$

$$
\begin{aligned}
g_{42}(p,\lambda) = & -\frac{22\,963\,886}{1\,177\,225} - \frac{6049}{1085}p - p^2 - \frac{237\,550\,583}{1\,367\,100}\lambda - \frac{113\,747}{1260}p\lambda + \\
& + \frac{1\,277\,029\,067}{607\,600}\lambda^2 + \frac{1\,419\,991}{2520}p\lambda^2 - \frac{1\,644\,438\,853}{234\,360}\lambda^3 - \frac{817\,177}{1008}p\lambda^3 + \\
& + \frac{92\,476\,221\,137}{8\,202\,600}\lambda^4 + \frac{2\,164\,661}{5040}p\lambda^4 - \frac{14\,100\,715\,427\,003}{1\,356\,163\,200}\lambda^5 - \\
& - \frac{6\,890\,671}{78\,120}p\lambda^5 + \frac{131\,464\,618\,651}{21\,873\,600}\lambda^6 + \frac{3631}{630}p\lambda^6 - \frac{3\,920\,013\,073}{1\,749\,888}\lambda^7 + \\
& + \frac{1\,930\,062\,779}{3\,645\,600}\lambda^8 - \frac{2\,473\,263\,067}{32\,810\,400}\lambda^9 + \frac{105\,765\,593}{18\,162\,900}\lambda^{10} - \frac{3631}{19\,530}\lambda^{11},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{52}(\lambda) = & -\frac{36\,874\,722\,147}{5\,109\,156\,500} - \frac{2\,362\,315\,264\,557}{20\,436\,626\,000}\lambda + \frac{20\,884\,081\,349\,269}{61\,309\,878\,000}\lambda^2 - \\
& - \frac{538\,059\,413\,076\,769}{1\,103\,577\,804\,000}\lambda^3 + \frac{1\,793\,665\,758\,154\,211}{4\,414\,311\,216\,000}\lambda^4 - \\
& - \frac{1\,445\,125\,981\,988\,557}{6\,621\,466\,824\,000}\lambda^5 + \frac{1\,026\,288\,639\,816\,701}{13\,242\,933\,648\,000}\lambda^6 - \\
& - \frac{8\,405\,817\,164\,119}{472\,961\,916\,000}\lambda^7 + \frac{1\,174\,407\,170\,347}{472\,961\,916\,000}\lambda^8 - \frac{106\,666\,081}{563\,049\,900}\lambda^9 + \\
& + \frac{3631}{605\,430}\lambda^{10},
\end{aligned}
$$

$$
g_{43}(\lambda) = -\frac{63}{4}\lambda^5 + \frac{651}{8}\lambda^4 - \frac{1395}{8}\lambda^3 + \frac{651}{4}\lambda^2 - 63\lambda + \lambda^6 + 8,
$$

$$
g_{53}(\lambda) = -\frac{1}{31}\lambda^5 + \frac{31}{60}\lambda^4 - \frac{155}{56}\lambda^3 + \frac{155}{24}\lambda^2 - \frac{31}{4}\lambda + \frac{3879}{1085}.
$$

В данном случае $d_1(p) = (p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)(p+3)$ (см. (28)). Используя теорему 1.1 из [29], убеждаемся, что у системы (30) вырождаются первые 4 компоненты.

3. Теперь выпишем для системы (48) матрицы регулятора финитной стабилизации (34)–(36):

$$
R_{00}(p,\lambda) = \Big[-\frac{1}{3}\lambda^4 + \frac{1}{2}\lambda^3 + \frac{4}{3}\lambda^2 - \lambda\Big]; \quad R_{01}(p,\lambda) = \Big[\lambda^3 - \frac{7}{2}\lambda^2 + \frac{7}{2}\lambda - 1\Big];
$$

$$
R_{02}(p,\lambda) = \Big[-\frac{1}{3}\lambda^4 - \frac{1}{6}\lambda^3 + \frac{7}{3}\lambda^2 + \frac{5}{3}\lambda - 2, -\frac{2}{3}\lambda^2 + \lambda - \frac{4}{3}, 0, 0, 0\Big];
$$

$$
R_{10}(p,\lambda) = \Big[-\frac{2}{9}\lambda^3 + \frac{5}{9}\lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda\Big]; \quad R_{11}(p,\lambda) = \Big[\frac{2}{3}\lambda^2 - 3\lambda + \frac{7}{3}\Big];
$$

$$
R_{12}(p,\lambda) = \Big[-\frac{2}{9}\lambda^3 + \frac{1}{9}\lambda^2 + \frac{22}{9}\lambda + \frac{8}{3}, -\frac{4}{9}\lambda + \frac{10}{9}, 0, 0, 0\Big];
$$

$$
R_{22}(p,\lambda) = Q(p,\lambda); \quad K(\lambda) = \mathrm{col}\Big[0, 0, \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda, 0, 0\Big].
$$

Составим характеристическую матрицу $W_1(p,\lambda)$ замкнутой системы (48), (34)–(36) (см. доказательство утверждения 1). Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\left|W_1(p,\lambda)\right| = d_1(p)d_0(p)$. Используя теорему 1.1 из работы [29] проверяем, что у системы (48), (34)–(36) вырождаются компоненты с номерами 1, 2, 4–7 за время, равное $16h$ (16 — максимальная степень переменной λ полиномов, являющихся элементами матриц регулятора (4)). На этом выполнение шага 3) завершается. В данном случае $\rho_0 = 2$, в лемме 2 полагаем $\rho_1 = 2$, $t_4 = 4h$, после чего видим, что можно взять $t_6 = t_5 + t_4 + 4h = 10h$, поскольку $m_0 = 2$ (см. лемму 2). Окончательно регулятор финитной стабилизации по выходу определяется формулой (38), а в тождестве (6) можно положить $t_1 = t_6 + 16h = 26h$.

4. Заключение

В работе получен критерий существования и предложен метод синтеза регулятора финитной стабилизации по выходу. Условия (7), (8) представляют собой [25, с. 206; 32] критерий полной 0-управляемости системы (1), (2) (критерий полного успокоения системы). Условия (9), (10) есть [25, с. 204; 32] критерий финальной наблюдаемости системы (1), (2) – существование однозначного непрерывного оператора восстановления состояния системы (1) по прошлому выходу (2). Таким образом, регулятор финитной стабилизации по выходу существует тогда и только тогда, когда система (1), (2) одновременно полностью 0-управляема и финально наблюдаема. В основе процедуры построения регулятора финитной стабилизации по выходу лежат методы проектирования регуляторов и наблюдателей [22, 25, 31], которые базируются на алгебраических операциях, реализованных в большинстве современных систем компьютерной математики. Это обстоятельство позволяет автоматизировать при разработке систем автоматического управления необходимые вычислительные процедуры, заложенные в работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Если для любой начальной функции φ в (3) существует управление u (программное или в виде обратной связи), обеспечивающее (6), то система (1) является полностью 0-управляемой. Отсюда следует [32] необходимость условий (7), (8). Докажем необходимость условия (9). Считаем, что существует регулятор финитной стабилизации по выходу (4). Предположим противное, условие (9) нарушается при некотором $p_0 \in \mathbb{C}$. Выберем вектор $g_0 \in \mathbb{C}^n$ как решение алгебраической системы $W(p_0, e^{-p_0h})g_0 = 0$, $C(e^{-p_0h})g_0 = 0$. Определим функцию $x_{p_0}(t) = \mathbf{Re}\big(g_0e^{p_0t}\big)$, $t \geqslant -mh$, если она не равна нулю, или $x_{p_0}(t) = \mathbf{Im}\big(g_0e^{p_0t}\big)$, $t \geqslant -mh$, в противном случае.

Регулятор (4) обеспечивает тождество (6) независимо от начальных условий (3) и (5). Положим в (3) и (5) соответственно $\varphi(t) = x_{p_0}(t)$, $t \in [-mh, 0]$,

$\tilde\varphi(t)=0,\quad t\in[t_0-\tilde h,t_0]$. Выпишем характеристическую матрицу системы (1), (4) ($e^{-ph}=\lambda$)

$$W_1(p,\lambda)=\begin{bmatrix}W(p,\lambda)-B(\lambda)U_{11}(p,\lambda)C(\lambda) & -B(\lambda)U_{12}(p,\lambda)\\ -U_{21}(p,\lambda)C(\lambda) & pI_{\tilde n}-U_{22}(p,\lambda)\end{bmatrix}. \tag{П.1}$$

Из (П.1) следует, что функция $\mathrm{col}[x_{p_0}(t),\,0]$, $t>t_0$, есть ненулевое решение замкнутой системы (1), (4). Это противоречит (6).

Докажем необходимость условия (10). По определению регулятора финитной стабилизации по выходу спектр системы конечен, $\big|W_1(p,\lambda)\big|=w(p)$, $w(p)$ – полином. Введем вспомогательную систему

$$\big(I_n-\Phi_0(\lambda_h)\big)\dot\xi(t)=\Phi(\lambda_h)\xi(t)+\Psi(\lambda_h)\bar u(t),\quad t>0, \tag{П.2}$$

где $\Phi_0(\lambda)=\big(D(\lambda)\big)'$, $\Phi(\lambda)=\big(A(\lambda)\big)'$, $\Psi(\lambda)=\big(C(\lambda)\big)'$, $\bar u$ – кусочно-непрерывное управление. Начальные условия для системы (П.2) выбираются аналогично начальным условиям (3).

Для системы (П.2) определим регулятор

$$\begin{aligned}\bar u(t)&=H_{11}(p_D,\lambda_h)\xi(t)+H_{12}(p_D,\lambda_h)\tilde x(t),\\ \dot{\tilde x}(t)&=H_{21}(p_D,\lambda_h)\xi(t)+H_{22}(p_D,\lambda_h)\tilde x(t),\end{aligned} \tag{П.3}$$

где $H_{i1}(p,\lambda)=\big(B(\lambda)U_{1i}(p,\lambda)\big)'$, $H_{i2}(p,\lambda)=\big(U_{2i}(p,\lambda)\big)'$, $i=1,2$. Обозначим через $W_\xi(p,\lambda)$ характеристическую матрицу системы (П.2), (П.3). Легко видеть, что $W_\xi(p,\lambda)=\big(W_1(p,\lambda)\big)'$, поэтому $\big|W_\xi(p,e^{-ph})\big|=w(p)$. Таким образом получили, что для системы (П.2) существует обратная связь такая, что замкнутая система имеет конечный (но не наперед заданный) спектр, т.е. является спектрально приводимой. Поэтому [15] выполняется условие $\mathrm{rank}\big[I_n-\Phi_0(\lambda),\,\Psi(\lambda)\big]=n\,\forall\lambda\in\mathbb{C}$, которое равносильно (10). Лемма 1 доказана.

Доказательство утверждения 1. Выпишем характеристическую матрицу $W_1(p,e^{-ph})$ системы (1), (2), (34)–(36) ($\lambda=e^{-ph}$):

$$W_1(p,\lambda)= \tag{П.4}$$

$$=\begin{bmatrix}W(p,\lambda)-B(\lambda)R_{00}(p,\lambda)C(\lambda) & -B(\lambda)R_{01}(p,\lambda) & -B(\lambda)R_{02}(p,\lambda)\\ -R_{10}(p,\lambda)C(\lambda) & pI_{n_1}-R_{11}(p,\lambda) & -R_{12}(p,\lambda)\\ -(K(\lambda)+\overline B(\lambda)R_{00}(p,\lambda))C(\lambda) & -\overline B(\lambda)R_{01}(p,\lambda) & pI_{n_2}-R_{22}(p,\lambda)-\overline B(\lambda)R_{02}(p,\lambda)\end{bmatrix}.$$

Представим переменную x_2 в соотношениях (34)–(36) как вектор, состоящий из двух векторных компонент: $x_2=\mathrm{col}[x_{21},x_{22}]$, $x_{21}\in\mathbb{R}^n$, $x_{22}\in\mathbb{R}^3$, а матрицы $R_{i2}(p,\lambda)$, $i=\overline{1,2}$, и $K(\lambda)$ в (37) разобъем на блоки, отвечающие компонентам x_{21}, x_{22}, и запишем их в подробном виде:

$$\begin{gathered}R_{02}(p,\lambda)=\big[L_{00}(p,\lambda)\Pi_{11}(\lambda),0_{r\times3}\big],\ R_{12}(p,\lambda)=\big[L_{10}(p,\lambda)\Pi_{11}(\lambda),0_{n_1\times3}\big],\\ R_{22}(p,\lambda)=\begin{bmatrix}A(\lambda)\Pi_{11}(\lambda)+V_{i_0}(\lambda)\widetilde C(\lambda) & Q_{12}(p,\lambda)\\ Q_{21}(p,\lambda) & Q_{22}(p,\lambda)\end{bmatrix},\ K(\lambda)=\begin{bmatrix}K_0(\lambda)\\ -K_1(\lambda)\end{bmatrix}.\end{gathered} \tag{П.5}$$

Здесь вид блоков $Q_{12}(p,\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times 3}[\lambda]$, $Q_{21}(p,\lambda) \in \mathbb{R}^{3\times n}[\lambda]$, $Q_{22}(p,\lambda) \in \mathbb{R}^{3\times 3}[\lambda]$ соответствует разбиению на блоки матрицы $Q(p,\lambda)$ в (29) (первый верхний блок матрицы (29) есть матрица $A_V(\lambda)$, описанная в (22)), $K_1(\lambda) = \mathrm{col}[1,0,0]\tilde{e}'_{i_0}C_y(\lambda)$ (см. (27)).

Замечание 7. Ниже необходимо будет выписать матрицы, разбитые на блоки. Для того чтобы уместить их по ширине страницы и тем самым сделать рассуждения более наглядными, в обозначениях блоков матриц в ряде случаев будем опускать аргументы. Например, записи типа B, $L_{00}\Pi_{11}$ и т.п. будут обозначать соответственно $B(\lambda)$, $L_{00}(p,\lambda)\Pi_{11}(\lambda)$ и т.п.

С учетом разбиения на блоки (П.5), определения матриц $K_0(\lambda)$ и $\overline{B}(\lambda)$ по формулам (22), (26) перепишем матрицу (П.4):

(П.6) $$W_1(p,\lambda) =$$
$$= \begin{bmatrix} W + BL_{00}\Pi_{12}C & -BL_{01} & -BL_{00}\Pi_{11} & 0_{n\times 3} \\ L_{10}\Pi_{12}C & pI_{n_1} - L_{11} & -L_{10}\Pi_{11} & 0_{n_1\times 3} \\ BL_{00}\Pi_{12}C + (A\Pi_{12} + V_{i_0}C_y)C & -BL_{01} & pI_n - A\Pi_{11} - V_{i_0}\widetilde{C} - BL_{00}\Pi_{11} & -Q_{12} \\ K_1C & 0_{3\times n_1} & -Q_{21} & pI_3 - Q_{22} \end{bmatrix}.$$

В системе (1), (2), (34)–(36) введем новую переменную ε согласно формуле

(П.7) $$x_{21}(t) = \big(I_n - D(\lambda_h)\big)x(t) + \varepsilon(t), \quad t \geqslant t_0.$$

Замену переменных (П.7) можно определить формулами

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x_1(t), \\ x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix} = \Omega(\lambda_h) \begin{bmatrix} x(t) \\ x_1(t), \\ \varepsilon(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix},$$

$$\Omega(\lambda) = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times n_1} & 0_{n\times n} & 0_{n\times 3} \\ 0_{n_1\times n} & I_{n_1} & 0_{n_1\times n} & 0_{n_1\times 3} \\ I_n - D(\lambda) & 0_{n\times n_1} & I_n & 0_{n\times 3} \\ 0_{3\times n} & 0_{3\times n_1} & 0_{3\times n} & I_3 \end{bmatrix},$$
$$\big|\Omega(\lambda)\big| \equiv 1.$$

Из этих формул видно, что матрица $W_1(p,\lambda)\Omega(\lambda)$ будет характеристической матрицей, полученной после замены системы, и $\big|W_1(p,\lambda)\big| = \big|W_1(p,\lambda)\Omega(\lambda)\big|$.

Для дальнейших преобразований матрицы $W_1(p,\lambda)\Omega(\lambda)$ получим некоторые соотношения. Предварительно заметим, что из определения матриц $\Pi_{ij}(\lambda)$ имеем

(П.8) $$\Pi_{11}(\lambda)\big(I_n - D(\lambda)\big) - \Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) = I_n.$$

Далее в матрице (П.6) к блоку с номером (3,1) прибавим блок с номером (3,3), предварительно умноженный на матрицу $\big(I_n - D(\lambda)\big)$ справа. Использовав формулу (П.8), выпишем следующую цепочку равенств:

$$
\begin{gathered}
B(\lambda)L_{00}(p,\lambda)\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) + \big(A(\lambda)\Pi_{12}(\lambda) + V_{i_0}(\lambda)C_y(\lambda)\big)C(\lambda) + \\
+\Big(pI_n - A(\lambda)\Pi_{11}(\lambda) - V_{i_0}(\lambda)\widetilde{C}(\lambda) - B(\lambda)L_{00}(p,\lambda)\Pi_{11}(\lambda)\Big)\big(I_n - D(\lambda)\big) = \\
= B(\lambda)L_{00}(p,\lambda)\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) + A(\lambda)\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) + \\
+V_{i_0}(\lambda)\begin{bmatrix}\big(I_l + C(\lambda)\Pi_{12}(\lambda)\big)C(\lambda)\\ \big(I_n - D(\lambda)\big)\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda)\end{bmatrix} + p\big(I_n - D(\lambda)\big) - \\
-A(\lambda)\Pi_{11}(\lambda)\big(I_n - D(\lambda)\big) - V_{i_0}(\lambda)\begin{bmatrix}C(\lambda)\Pi_{11}(\lambda)\big(I_n - D(\lambda)\big)\\ \Big(\big(I_n - D(\lambda)\big)\Pi_{11}(\lambda) - I_n\Big)\big(I_n - D(\lambda)\big)\end{bmatrix} - \\
-B(\lambda)L_{00}(p,\lambda)\Pi_{11}(\lambda)\big(I_n - D(\lambda)\big) = -B(\lambda)L_{00}(p,\lambda) + p\big(I_n - D(\lambda)\big) - A(\lambda) + \\
+V_{i_0}(\lambda)\begin{bmatrix}C(\lambda) + C(\lambda)\Big(\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) - \Pi_{11}(\lambda)\big(I_n - D(\lambda)\big)\Big)\\ \big(I_n - D(\lambda)\big)\Big(\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda) - \Pi_{11}(\lambda)\big(I_n - D(\lambda)\big)\Big) + \big(I_n - D(\lambda)\big)\end{bmatrix} = \\
= W(p,\lambda) - B(\lambda)L_{00}(p,\lambda).
\end{gathered}
\tag{П.9}
$$

Затем в матрице (П.6) к первой строке блока с номером (4,1) прибавим первую строку блока с номером (4,3), умноженную на матрицу $\big(I_n - D(\lambda)\big)$ справа (заметим, что оставшиеся две нижних строки указанных выше блоков являются нулевыми, это следует из (29) и вида матрицы $K_1(\lambda)$). Используя промежуточные рассуждения в цепочке равенств (П.9), имеем следующее соотношение:

$$
\begin{gathered}
[1,0,0]K_1(\lambda)C(\lambda) - [1,0,0]Q_{21}(p,\lambda)\big(I_n - D(\lambda)\big) = \\
= \tilde{e}'_{i_0}\left(\begin{bmatrix}\big(I_l + C(\lambda)\Pi_{12}(\lambda)\big)C(\lambda)\\ \big(I_n - D(\lambda)\big)\Pi_{12}(\lambda)C(\lambda)\end{bmatrix} - \right. \\
\left. - \begin{bmatrix}C(\lambda)\Pi_{11}(\lambda)\big(I_n - D(\lambda)\big)\\ \Big(\big(I_n - D(\lambda)\big)\Pi_{11}(\lambda) - I_n\Big)\big(I_n - D(\lambda)\big)\end{bmatrix}\right) = 0.
\end{gathered}
\tag{П.10}
$$

Использовав формулу (П.8) и соотношения (П.9), (П.10), видим, что

$$
W_1(p,\lambda)\Omega(\lambda) = \\
= \begin{bmatrix}
W - BL_{00} & -BL_{01} & -BL_{00}\Pi_{11} & 0_{n\times 3}\\
-L_{10} & pI_{n_1} - L_{11} & -L_{10}\Pi_{11} & 0_{n_1\times 3}\\
W - BL_{00} & -BL_{01} & pI_n - A\Pi_{11} - V_{i_0}\widetilde{C} - BL_{00}\Pi_{11} & -Q_{12}\\
0_{3\times n} & 0_{3\times n_1} & -Q_{21} & pI_3 - Q_{22}
\end{bmatrix}.
$$

В матрице $W_1(p,\lambda)\Omega(\lambda)$ умножим первую строку блоков на (-1) и прибавим к третьей, полученным результатом заменим третью строку блоков. Матрицу, определяющую данное преобразование, обозначим через Ω_1. Очевидно, что $\left|\Omega_1\right| = 1$ и

$$\Omega_1 W_1(p,\lambda)\Omega(\lambda) = \tag{П.11}$$

$$= \begin{bmatrix} W - BL_{00} & -BL_{01} & -BL_{00}\Pi_{11} & 0_{n\times 3} \\ -L_{10} & pI_{n_1} - L_{11} & -L_{10}\Pi_{11} & 0_{n_1\times 3} \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n_1} & pI_n - A\Pi_{11} - V_{i_0}\widetilde{C} & -Q_{12} \\ 0_{3\times n} & 0_{3\times n_1} & -Q_{21} & pI_3 - Q_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} W_0(p,\lambda) & \widetilde{W}(p,\lambda) \\ 0_{(n+1)\times(n+n_1)} & pI_{n+3} - Q(p,\lambda) \end{bmatrix},$$

где блок $\widetilde{W}(p,\lambda)$ определяется очевидным образом. Из структуры матрицы (П.11) видно, что функция $\operatorname{col}[\varepsilon, x_{22}]$ определяется системой с характеристической матрицей $I_{n+3} - Q(p,\lambda)$, (т.е. системой вида (30), которая, напомним, является точечно вырожденной). Поэтому $e_i'\operatorname{col}[\varepsilon(t), x_{22}(t)] \equiv 0$, $t \geqslant t_0 + \tilde{t}_2$, $i = \overline{1, n+2}$. Значит, при $t \geqslant \bar{t}_4$, имеем $\bar{t}_4 = t_0 + \tilde{t}_2 + \gamma_5 h$, где γ_5 – максимальная степень переменной λ в блоке $\widetilde{W}(p,\lambda)$, функция $\operatorname{col}[x, x_1]$ определяется однородной системой с характеристической матрицей (14), которая также является точечно вырожденной. Поэтому при $t_1 = \bar{t}_1 + \bar{t}_4$, где $\bar{t}_1$ определено в (12), имеют место тождества $\bar{e}_i'\operatorname{col}[x(t), x_1(t)] \equiv 0$, $t \geqslant t_1$. Отсюда и из (П.7) следует точечная вырожденность системы (1), (2), (34)–(36).

Из вида матрицы $\Omega_1 W_1(p,\lambda)\Omega(\lambda)$ в (П.11) и равенств (28), (13) следует, что собственные значения системы (1), (2), (34)–(36) определяются корнями полинома $d_1(\lambda)d_0(\lambda)$. Утверждение 1 доказано.

Доказательство леммы 2. В системе (1) введем новую переменную $X(t) = \big(I_n - D(\lambda_h)\big)x(t)$, $t \geqslant 0$. Тогда $x(t) = \Pi_D(\lambda_h)X(t)$, $t \geqslant h\deg_\lambda \Pi_D(\lambda)$, и функция $X(t)$ определяется системой запаздывающего типа

$$\dot{X}(t) = A(\lambda_h)\Pi_D(\lambda_h)X(t), \quad t > hm_0. \tag{П.12}$$

Известно, что гладкость решения системы запаздывающего типа (П.12) с увеличением времени на величину $m_0 h$ увеличивается на единицу. Поэтому для заданного ρ_1 при $t \geqslant m_0 h + (\rho_1 - 1)m_0 h = \rho_1 m_0 h$ функция $X(t)$ такова, что $X \in \widetilde{C}^{\rho_1}\big([\rho_1 m_0 h, +\infty), \mathbb{R}^n\big)$. Отсюда следует справедливость доказываемого утверждения. Лемма доказана.

Доказательство леммы 3. В силу условия (10) найдутся [15; 25, с. 228] полиномиальные матрицы $M_{ij}(\lambda)$, $K_{ij}(\lambda)$ подходящих размеров такие, что

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} I_n - D(\lambda) - \lambda B(\lambda)M_{11}(\lambda) & -\lambda B(\lambda)M_{12}(\lambda) \\ -\lambda M_{21}(\lambda) & I_r - \lambda M_{22}(\lambda) \end{vmatrix} \equiv 1, \\ &\begin{vmatrix} I_n - D(\lambda) - \lambda K_{11}(\lambda)C(\lambda) & -\lambda K_{12}(\lambda) \\ -\lambda K_{21}(\lambda)C(\lambda) & I_l - \lambda K_{22}(\lambda) \end{vmatrix} \equiv 1. \end{aligned} \tag{П.13}$$

Определим матрицы

$$\widetilde{U}_{11}(\lambda) = 0_{r\times n}, \quad \widetilde{U}_{12}(\lambda) = \left[\lambda M_{12}(\lambda), \ \ \lambda M_{11}(\lambda), \ \ 0_{n\times l}\right],$$

$$\widetilde{U}_{21}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0_{(r\times n)} \\ -\lambda K_{11}(\lambda) \\ -\lambda K_{21}(\lambda) \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{U}_{22}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda M_{22}(\lambda) & \lambda M_{21}(\lambda) & 0_{r\times l} \\ \lambda B(\lambda) M_{12}(\lambda) & D(\lambda) + \lambda K_{11}(\lambda) C(\lambda) + \lambda B(\lambda) M_{11}(\lambda) & \lambda K_{12}(\lambda) \\ 0_{l\times r} & \lambda K_{21}(\lambda) C(\lambda) & \lambda K_{22}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Заметим, что $\widetilde{U}_{ij}(0)$ – нулевые матрицы. Обозначим:

$$\Gamma(\lambda) = E\big(I_{2n+r+l} - \widetilde{D}(\lambda)\big)E^{-1}, \ \ \text{где} \ \ E = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times r} & 0_{n\times n} & 0_{n\times l} \\ 0_{r\times n} & I_r & 0_{r\times n} & 0_{r\times l} \\ -I_n & 0_{n\times r} & I_n & 0_{n\times l} \\ 0_{l\times n} & 0_{l\times r} & 0_{l\times n} & I_l \end{bmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\Gamma(\lambda) =$$

$$= \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) - \lambda B(\lambda) M_{11}(\lambda) & -\lambda B(\lambda) M_{12}(\lambda) & -\lambda B(\lambda) M_{11}(\lambda) & 0_{n\times l} \\ -\lambda M_{21}(\lambda) & I_r - \lambda M_{22}(\lambda) & -\lambda M_{21}(\lambda) & 0_{r\times l} \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times r} & I_n - D(\lambda) - \lambda K_{11}(\lambda) C(\lambda) & -\lambda K_{12}(\lambda) \\ 0_{l\times n} & 0_{l\times r} & -\lambda K_{21}(\lambda) C(\lambda) & I_l - \lambda K_{22}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Учитывая тождества (П.13), заключаем, что $\left|\Gamma(\lambda)\right| \equiv 1$. Отсюда следует (42). Лемма доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г.* Математические модели динамических систем с запаздыванием. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та. 2012. 122 с. https://rucont.ru/efd/209395 (дата обращения: 15.07.2024)
2. *Глаголев М.В., Сабреков А.Ф., Гончаров В.М.* Дифференциальные уравнения с запаздыванием как математические модели динамики популяций // Динамика окружающей среды и глобальные изменения климата. 2018. Т. 9. № 2. С. 40–63. https://doi.org/10.17816/edgcc10483
3. *Полосков И.Е.* Методы анализа систем с запаздыванием [Электронный ресурс]: монография: Пермский государственный национальный исследовательский университет. Электронные данные. Пермь. 2020. – 19 Мб ; 900 с. Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/poloskov-metody-analiza-sistem.pdf.
4. *Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.* О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
5. *Осипов Ю.С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 5. С. 606–618.
6. *Pandolfi L.* Stabilization of neutral functional-differential equations // J. Optim. Theory Appl. 1976. V. 20. No. 2. P. 191–204. https://doi.org/10.1007/BF01767451

7. *Lu W.S., Lee E., Zak S.* On the stabilization of linear neutral delay-difference systems // IEEE Transact. Autom. Control. 1986. V. 31. No. 1. P. 65–67. https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104115
8. *Rabah R., Sklyar G.M., Rezounenko A.V.* On Pole Assignment and Stabilizability of Neutral Type Systems / In Topics in Time-Delay Systems. V. 388 of Lecture Notes in Control and Inf. Sci. Berlin: Springer, 2009. P. 85–93. https://doi.org/10.1007/978-3-642-02897-7_8
9. *Долгий Ю.Ф., Сесекин А.Н.* Исследование регуляризации вырожденной задачи импульсной стабилизации системы с последействием // Тр. ин-та мат. и механики УрО РАН. 2024. Т. 30. № 1. С. 80–99. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2024-30-1-80-99
10. *Hu G.D., Hu R.* A frequency-domain method for stabilization of linear neutral delay systems // Syst. Control. Lett. November 2023. V. 181. Art. 105650. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2023.105650
11. *Миняев С.И., Фурсов А.С.* Топологический подход к одновременной стабилизации объектов с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1453–1461. https://doi.org/10.1134/S0374064113110095
12. *Watanabe K.* Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays // IEEE Trans. Autom. Control. 1986. V. AC–31. No. 6. P. 543–550. https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104336
13. *Wang Q.G., Lee T.H., Tan K.K.* Finite Spectrum Assignment Controllers for Time Delay Systems. Springer-Verlag, 1999. 129 p. https://doi.org/10.1007/978-1-84628-531-8
14. *Метельский А.В.* Спектральное приведение, полное успокоение и стабилизация системы с запаздыванием одним регулятором // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1436–1452. https://doi.org/10.1134/S0374064113110083
15. *Хартовский В.Е.* Спектральное приведение линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 3. С. 375–390. https://doi.org/10.1134/S0374064117030086
16. *Марченко В.М.* Управление системами с последействием в шкалах линейных регуляторов по типу обратной связи // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 1003–1017. https://doi.org/10.1134/S0012266111070111
17. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* Критерии модальной управляемости линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 11. С. 1506–1521. https://doi.org/10.1134/S0374064116110078
18. *Хартовский В.Е.* Модальная управляемость линейных систем нейтрального типа в классах дифференциально-разностных регуляторов // АиТ. 2017. № 11. С. 3–19. https://doi.org/10.1134/S0005117917110017
19. *Zaitsev V., Kim I.* Arbitrary coefficient assignment by static output feedback for linear differential equations with non-commensurate lumped and distributed delays // Mathematics. 2021. No. 9. P. 2158. https://doi.org/10.3390/math9172158
20. *Карпук В.В., Метельский А.В.* Полное успокоение и стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 6. С. 19–28. https://doi.org/10.1134/S1064230709060033
21. *Метельский А.В., Урбан О.И., Хартовский В.Е.* Успокоение решения дифференциальных систем с многими запаздываниями посредством обратной связи // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 2. С. 40–50. https://doi.org/10.7868/S0002338815020109

22. *Метельский А.В., Хартовский В.Е., Урбан О.И.* Регуляторы успокоения решения линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 391–403. https://doi.org/10.1134/S0374064116030122
23. *Фомичев В.В.* Достаточные условия стабилизации линейных динамических систем // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1516–1521. https://doi.org/10.1134/S0374064115110126
24. *Метельский А.В.* Полная и финитная стабилизация дифференциальной системы с запаздыванием обратной связью по неполному выходу // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1665–1682. https://doi.org/10.1134/S0374064119120082
25. *Хартовский В.Е.* Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей : моногр. Гродно: ГрГУ, 2022. 500 с.
26. *Хартовский В.Е.* Финитная стабилизация и назначение конечного спектра единым регулятором по неполным измерениям для линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60. № 5. С. 686–706. https://doi.org/10.31857/S0374064124050093
27. *Харитонов В.Л.* Управления на основе предиктора: задача реализации // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2015. № 4. С. 51–65. URL: http://diffjournal.spbu.ru/pdf/kharitonov2.pdf
28. *Mondie S., Mihiels W.* Finite Spectrum Assignment of Unstable Time-delay Systems with a Safe Implementation // IEEE Transact. Autom. Control. 2003. V. 48. No. 12. P. 2207–2212. https://doi.org/10.1109/TAC.2003.820147
29. *Kappel F.* Degenerate difference-differential equations. Algebraic theory // Differential Equations. 1977. V. 24. No. 1. P. 99–126.
30. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа // АиТ. 2019. № 12. С. 80–102. https://doi.org/10.1134/S0005231019120055
31. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* О точном восстановлении решения линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 265–285. https://doi.org/10.31857/S0374064121020138
32. *Хартовский В.Е., Павловская А.Т.* Полная управляемость и управляемость линейных автономных систем нейтрального типа // АиТ. 2013. № 5. С. 59–80. https://doi.org/10.1134/S0005117913050032
33. *Емельянов С.В., Фомичев В.В., Фурсов А.С.* Одновременная стабилизация линейных динамических объектов регулятором переменной структуры // АиТ. 2012. № 7. С. 15–24. https://doi.org/10.1134/S0005117912070028

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 16.07.2024

После доработки 22.09.2024

Принята к публикации 23.09.2024